上越数学教育研究，第 22 号，上越教育大学数学教室，2007 年，pp.143-154.

小学校算数から中学校数学への接続を促す学習指導に関する研究
— 中学校１年『平面図形』の単元開発 —

髙本誠二郎
上越教育大学大学院修士課程１年

１．はじめに

論証とは，既知の命題から，論理的手順に従って新しい命題を導き出し，命題を一つの体系にする方法であり，「数学はこの方法により学問としての数学となった」(杉山, 1986) と言える。また，平林（1986）が「小学校算数と中学校以上の数学とを，もっともはっきり区別するものは，(「変数」と）「論証」の存在」と述べるように，論証は，中学校以上の数学を特徴づけるものであり，中学校の論証に関わる内容は，数学という学問の成り立ちを学んでいく上での基礎として，重要な位置を占めているとも言えよう。

しかし，平林が「中学での数学落ちこぼれの最もふえるのは，２年で論証が現れるときのようである。」と指摘するように，論証は，生徒が学習に困難を覚える内容としても認知されてきた。筆者も，現場での経験から，中学２年の文字や図形に関する論証の内容を扱うあたりから数学に対して抵抗感を抱く生徒たちを数多く見てきた。したがって，論証を，中学校数学を特徴づけるものとしたとき，算数との間には大きなギャップがあることが示唆され，それを図１のように示しておく。

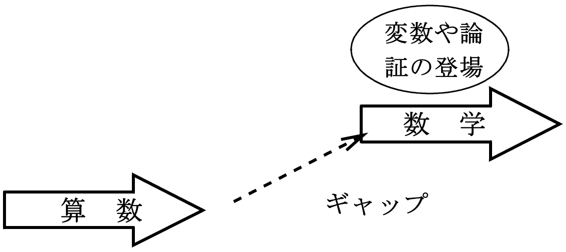


図１．算数と数学のギャップ.

本研究は，図形分野に焦点化して，このギャップがどのように生じているかを明らかにするとともに，その接続を促す学習指導を開発することを目的とするものである。

これまでにも論証に関する研究は数多く行われ，多くの成果が伝えられているが，生徒の感じる証明の困難や証明の指導に関する課題は依然として残っているのが現状である。中学２年での証明の導入時の指導に関わる研究は数多くあり（例えば，国宗，1987；橋本，風間，2000），筆者自身の反省からも，図形の証明を必要とする場面になってはじめて論証的な指導に力を入れるという傾向があった。それらの研究や指導は，図１で考えると，ギャップを表す矢印の数学に近い部分Ａでの取り組みであると言えよう（図２）。

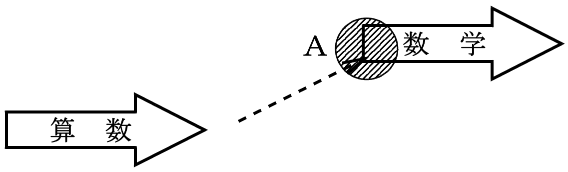


図２．中２論証導入時の指導の位置.

しかし，この論証導入期の手だてだけで論証指導の困難が解消されてきてはいないし，それは，算数との間のギャップが，そうした研究だけでは埋めようがないほど大きいことを示唆していることに他ならない。つまり，算数からの押し上げも同時に必要とされるのではないかと考えられる。この両者を結ぶ一貫した学習の流れをつくっていこうとするのが本研究の意図である（図３）。

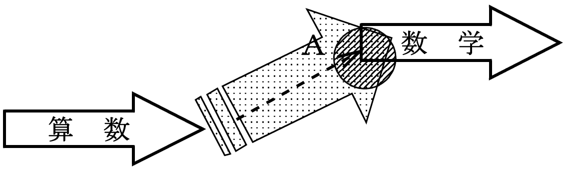


図３．算数と数学を結ぶ学習の流れ.

そのためには，小中を結ぶ中学校１年の図形の学習指導の再考は不可欠な課題となろう。また，単に図形分野だけをターゲットに学習指導を開発するのでなく，広く数学を今後学習する上での基礎とは何かということも視野におさめながら検討していきたい。

この視座に立ち，本研究は，算数から数学への接続を促す移行教材として，中学１年『平面図形』の単元に焦点を当てて，移行の様相を明らかにしていく。そのために，まず，移行に関わる理論的視点について先行研究を吟味し，移行を促す学習指導についての視座を得る。次に，論証導入期に関して行った実践を振り返り，実践面から移行を促す要因について吟味する。そして，最後に，中学校１年の『平面図形』の単元を，上記の視座から構想し，まとめとしたい。

２．移行期における図形の指導

本節では，論証指導，論証における生徒の思考の特徴，および，移行期の特徴についての先行研究を概観し，移行期における学習と指導についての仮説的な枠組みを設定することを目的とする。

2.1. 先行研究に見る論証の扱いから

2.1.1. 前形式的証明

國本（1995）は，証明を，実証や実験によって真理性を主張する「経験的説明」，言語だけではなく，操作的・図的表現と結びつき，現実において学習者に受け入れやすいアイデアを用い，１つの例やモデルで根拠を示す「前形式的証明」，そして，仮定や性質などに基づく論理のみによる演繹的推論である「形式的証明」の３つの水準でとらえ，その関係を図４のように示した。

形式的証明

生成　納得

〔妥当する範囲を一般化する〕

前形式的証明

・範例による証明
・現実に方向づけられた証明
・図的・直観的証明
・操作的証明

〔根拠を示して命題の真理性を主張する〕

経験的説明　〔事実に基づいて命題の真理性を主張する〕

図４．説明や証明の３つの水準.

例えば「任意の自然数において，数字の和が９で割り切れるならば，数そのものも９で割り切れる」という定理について，図５のような説明が考えられる。

① 36，108 では言える。しかし，37，100 では言えない。ゆえに定理は成り立つ。

② ○○○○○○○○○○　○
○○○○○○○○○○　○
○○○○○○○○○○　○ ｝３
○○
３２

二位数や三位数をおはじきで示し，そこから，９個ずつを取り除いていくと，残ったおはじきの数は数字の和に一致する。この操作がどんな数にも適用できるので，定理は成り立つ。

③ ②のやり方を数字を用いて表現する。

$$32 = 3 \times 10 + 2$$
$$= 3 \times 9 + (3 + 2)$$

④ 変数を使って証明する。

$$ab = a \times 10 + b$$
$$= a \times 9 + (a + b)$$

この式変形により，数字の和である（ａ＋ｂ）が９で割り切れるならば，数そのものも９で割り切れることがわかる。

⑤ ④を任意の位数に一般化する。

図５．９で割り切れる数の定理についての説明.

図５の説明は，図４の水準に照らして，①を経験的説明，②，③を前形式的証明，④，⑤を形式的証明として分類されている。

そして，國本は，前形式的証明の意義を「形式的証明を生成したり，納得させたり，それ独自で定理の意味を明確にさせることにある」と述べ，「証明が生徒にとってより身近なもの，理解可能なものになるためにも，前形式的証明をより重視した指導が必要である」と主張する。証明の導入時における筆者自身の指導を振り返ってみると，経験的説明から形式的証明への直接の引き上げをねらったものであったように反省する。前形式的証明を，経験的説明を形式的証明につなげる重要な橋渡しとして着目するとらえは，論証への移行を目指した学習指導として大きな示唆を与えるものと考える。一方で，中学校１年の学習指導が，最初から論証を目指して展開されているわけではないので，算数の知識を押し上げる学習指導とセットで考えていく必要があるし，國本の挙げる事例は，数式領域のものが中心であり，図形分野における教材の開発が課題となっているように思われる。

2.1.2. 『証明の本性』の意義

論証の論理形式の獲得という面だけでなく，論証指導では思考面の育成も重要となろう。本稿では，論証の必要性や意味を理解させる指導の試みとして，フォセットが 1938 年に学位論文として提出した『証明の本性（The Nature of Proof）』の論考を参考にしながら，論証に対して培うべき能力について，まとめてみたい。

フォセット（1966）は，「幾何の証明が批判的・反省的思考を育成するための手段として用いられ得るような授業手続き」の解明を研究目的とし，目標とする具体的な生徒の姿として次の１～７のような「操作的定義」を示した（cf. 清水，1996a）。

「１．あらゆる陳述の中に重要な言葉や表現を選び，それらを注意深く定義することを求める。
２．受け入れるよう求められるどんな結論もそれを支持する証拠を要求する。
３．証拠を分析し事実と仮定を区別する。
４．結論に欠くことができない仮定の陳述の有無を認識する。
５．それらの仮定を，受け入れたり，拒否したりして，評価する。
６．結論を受け入れたり拒否したりして，議論を評価する。
７．絶えず，信念の背後にあり行動を方向づける仮定を再検討する。」

フォセットは，数学という分野に留まらず，自分自身の思考や行動の吟味の必要性を信念に掲げ，実際の授業では，非数学的場面に関する問いの吟味から始めている。しかし，清水（1996a）によれば，数学という教科内容の指導を通じてメタ認知的スキルが育成されるべきと指摘する今日の研究成果からの限界を認めながらも，定理を与えられたものとしてではなく，自分で「受け入れてよい性質」として検討していくような活動は，生徒が自分の行動に対して自覚的になることを促すと評価する。このことを踏まえ，清水（1996b）は，高校生を対象に，凹型四角形における鈍角の外角をどのように定義するかを研究し，定義を構成する過程における生徒の思考が，自分の思考に「自覚的」でかつ「内省的」な特徴を示し，一連の活動を通して定義観の変容も認められたと述べている。

この研究は，形式的な証明を指導する論証指導だけでなく，それ以前の移行期にも適した証明観であるように思われる。「本来定義は，何か目的的な作業の中で，必要に応じて作られるものであり，そうした作業的文脈での定義行為は，算数科でも重要」（平林，1991）であり，「定義をつくり出す活動を教授学的に準備してはじめて定義が機能し始める」（岡

崎，1999）と指摘されるように，むしろ，こうした定義・定理についての見方の学習が，形式的な証明の学習以前に位置づけられる必要があると考える。

2.1.3. 口頭表現の活用

子どもの認知発達の促進のために，論証指導に討論を取り入れる研究も多い。榎戸ら（1988）は，平行四辺形の定義の指導場面を取り上げ，「個々の生徒の図形認識についての発達の様相を把握した教師によって巧みに構成された，生徒同士および教師と生徒の交流・対決がなされる討論」による学習指導の教育的効果を，以下のように指摘する。

「①　思考過程を明確にすることができる。
②　他の人々の考え方と自分の考え方とを関係づけることができる。
③　新しいアイデアを引き起こすことができる。
④　学習意欲を高めることができる。」

また，江森（1994）は，集団思考が常に最良の意志決定をもたらすとは限らないことにも注意を払う必要性に触れながら，図形と論証の学習に oral　expression を用いたコミュニケーション活動が不可欠であると指摘する。

我々の言語体系は，通常，oral expression（口頭表現）と written　expression（書記表現）によって構造化されている。従来，数学教育では，数学のもつ論理性や形式性に反するという考え方から，口頭表現は，他者とのコミュニケーションのための補助手段でしかないとされ，書記表現よりも軽視されてきた傾向があった。しかし，江森は，「言語化という作業は，活動を通して得た直観的で漠然とした「思い」を頭の中で整理し，自己の思いを客観的にとらえる対象を言語化された「思考」として獲得することにつながるもの」とし，「この思いを言語化し，言語化された思考を数学の形式にしたがって深めていくことこそが，具体的な操作活動から論証の構成へと結びつけていく活動となる」と主張する。

本研究でも，完全な証明を完成させることよりも，そこに至るまでのプロセスにおける思考の変容や他者との関わりを重視したい。

算数で培った経験的・帰納的な思考を生かし，その時点で共通理解された前提を基に説明し合い，その内容を検証して新たな共通理解を生む。その際，自分の思いを表現するには，口頭表現の方が多くの生徒が関わりやすいと思われる。このような活動の積み重ねにより，筋道の通った考え方に慣れ，形式的証明のよさを実感できるようになると考える。

2.2. 論証に入る前の生徒の思考の特徴

林（1959）は，中２での図形の論証の初期には，生徒のものの考え方が，学習を助ける方向にも妨げる方向にも強い影響を及ぼすと指摘する。そして，小５から中１の児童・生徒へのインタビュー調査から，論証が始まる頃の生徒の思考法の特徴として，以下のような項目を挙げている。

「１．大前提の意識が明確ではない。
２．推理が直観的全体的である。
３．特殊と一般との区別がつきにくい。
４．論理は抽象的にはわからない。
５．思考が具体的行動的である。」

また，岡崎と岩崎（2003）による命題認識の調査では，論証を始める上での前提である命題が認識されていないことが示唆される。

さらに，小関ら（1992）は，平行四辺形の概念形成について，その認知の発達に次の３つの段階があるとし，小４から中３までの児童・生徒の発達段階の実態を調べた。

［段階Ⅰ］平行四辺形を，長方形，ひし形，正方形を除いたものととらえる。
［段階Ⅱ］平行四辺形を，平行四辺形，長方形，ひし形，正方形の集まりととらえる。（それぞれの四角形の間の関係については，はっきりととらえてはいない）

［段階Ⅲ］平行四辺形を概念としてとらえる。

その調査によれば，小６で四角形の相互関係の指導が行われていた旧学習指導要領下においても，その指導を受ける直前の小５の児童の９０％が［段階Ⅰ］にとどまっており，さらには，その指導を受けた後の中１の生徒でさえも，約６０％の生徒が［段階Ⅰ］にとどまっていると指摘する。

現学習指導要領は，それまでの指導内容が大幅に削減され，生徒たちが，図形を構成・分解したり，作図したりするなどの具体的な活動経験が少ないままで中学校数学を学ぶことになっているので，その意味で，小中のギャップは以前にも増して拡大している可能性すらある（相馬，2003）。

以上の点から，目標，あるいは，プロセスとしての論証の見方と，この現状とは，かなりのギャップが存在するように見える。特に，図形の認識が具体的で，直観的，かつ，命題的なものの見方が乏しい状態であることを前提にして，2.1.節で吟味した指導を展開せねばならない。その点でも，移行期において，いかなる学習指導を心がければよいかについて，整理しておく必要があろう。

2.3. 移行段階の様相

本節では，算数から数学への移行段階の指導を吟味していく。

岡崎と岩崎（2003）は，「中１の作図」に焦点を当て，生徒の活動やそこから生じる認知的様相に着目し，算数から数学への移行の枠組みを次のように示している。

「◎算数的段階：図形の特徴の認識

A1：図形の性質を生起させる

A2：主に経験的・帰納的な思考

◎移行的段階：図形の関係性の認識

T1：かたちや性質を道具として用いる　（用具的理解）

T2：性質を組み合わせ，図形を決定する　（関係的理解）

T3：性質を序列化し，仮定の本性を知る　（論理的理解）

（T1，T2 は，定義の認識と関連する）

◎数学的段階：図形の演繹性の認識

M1：関係を，推論の連鎖の中で，言語・記号的に用いる

M2：主に演繹的な思考」

本研究では，この枠組みをベースにしつつ，他の研究成果をも組み込みながら枠組みをつくっていきたい。

例えば，橋本（2006）は，図形の学習において「中２で「図の役割」が変わる」と指摘し，次のように続ける。

「　中２の図形の論証の学習にいたるまで，つまり小学校から中１までは，生徒は，かかれた図や作られたモデルに具現された図形の関係や性質を物理量を調べて学習する。そこでは作られた図やモデルを生徒は「図形」と考え，物理量で学習した図の性質を「図形の性質」ととらえている。（中２からは）図形の性質や関係が学習の中心であり，いくつかの原理に基づいて証明するという学習方法となる。それらはふつう文や記号や式で表され，「図」はその補足説明を受け持つことになる。」

橋本の見解からは，算数と数学の間で，図形が，図そのものから，論理的関係を内包した「一般的な図形」へと変容する様相が示唆される。

また，前述の先行研究の中で，特に，oral expression と written expression との関係を明確にすることも必要とされよう。つまり，口頭表現を行い，それを書かれた表現に結びつけることや，その時点で正しいと認められたことを根拠として説明するといったコミュニケーションの面を考慮することが必要となってくる。そこで，岡崎と岩崎（2003）の移行的段階を修正・発展させ，図６のように仮説的

な枠組みを考えていくものとする。

Ｔ１：表現・コミュニケーションの面
- T1-1：関係づけの操作の「言語化」
- T1-2：合意をはかり，それに基づき説明を行う
- T1-3：図形の見方を，図そのものから図形へと変えていく

Ｔ２：認知面
- T2-1：かたちや性質を道具として用いる（用具的理解）
- T2-2：性質を組み合わせ，図形を決定する（関係的理解）
- T2-3：性質を序列化し，仮定の本性を知る（論理的理解）

図６．移行的段階の仮説的枠組み.

もちろん，Ｔ１とＴ２は相互に関連し，明確に分けられないものであるが，これらの面から学習指導を吟味していくことで，移行の段階の解明に努めたいと考える。

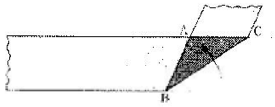
３．予備的実験授業の考察から

本節では，移行段階の指導を具体化する前に，筆者が中学２年の証明の導入場面を想定して行った予備的実験授業について分析し，単元開発のための示唆を得ることを目的とする。この授業は，先に述べた図２の点からの工夫であり，算数からの押し上げまでは考慮されていないものの，基本的な授業プロセスを考えていくための材料となると考える。

3.1. 授業の概要

予備的実験授業は，Ｊ大学の大学院生用の授業の一環として，２００６年５月１０日，大学院生７名に「①図形の性質等，結果だけは覚えている，②間違いを恐れて苦手意識が先行してしまいがち，③理由づけは苦手だが直観力はある」という想定で生徒役になってもらい,筆者が教師として行ったものである。授業は，以下の教科書の問題（一松他，1996）から構成した。

図のように紙テープを折ったとき，重なった部分にできる三角形はどのような三角形かを調べなさい。



また，そのことを証明しなさい。

図７．教科書の原問題.

まず，証明する必要性を感じさせるためのアプローチとして，各自で紙を折る作業をとり入れて，生徒から出されたいくつもの図をもとに，どの図形にも共通することを，「絶対に言えることだろうか」と問い，議論させることにした。

次に，証明の仕方については，最初からきちんと正しく記述できることを求めずに，根拠をおさえながら口述できることを重要視することとした。“証明が正しく記述できない＝(イコール)証明がわからない”と受けとめてしまう生徒が多いことからである。まず，自分が納得し，次に人に納得してもらえれば，証明の文章化が可能であろうという仮説のもと，本授業を進めた。

3.2. 分析

3.2.1. 操作活動の有効性

各自が手元にある直線テープを折り，そこには必ず三角形ができ，その形は二等辺三角形であることを確認した後，全体追究の場面の中で，「△ＡＢＣ（図８）が二等辺三角形になる根拠を，定規で測ったりせずに考えてみよう」と教師は問いかけた。生徒Ｓ１が，

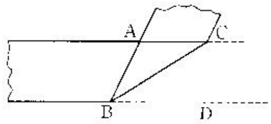


図８．△ＡＢＣ

「前に習った錯角っていうのを考えたら，ここの角とここの角（∠ＡＣＢと∠ＣＢＤ）は同じ。見た限り絶対この角度とここの角度（∠ＡＣＢと∠ＡＢＣ）が一緒になるってことが

言えればいいと思うんだけど…」と疑問を述べた時，Ｓ２，Ｓ３は次のような操作上の説明を与えた。

S2：折ったってことは，上のそのもとの線とＢＣが作る角度を移動したみたいになっているから一緒じゃないかなと思いました。

S3：その今折ってあるのを開いて，それが同じ角度を作ってるのかなって思いました。

この後，Ｓ１が「折ってもらったらわかった」と述べたように，操作が理由説明に効果的であったことがわかる。最終的にＳ４が次のようにまとめた。

S4：Ｃの所の角度とそのＢの上にあるそこが錯角だから等しくて，そこの角度（∠ＡＢＣ）とＢの所の角度（∠ＣＢＤ）が，（両手でジェスチャーを交えながら）こう起こしてみると同じ角度だから等しい。ということは，∠Ｂと∠Ｃが等しいから，△ＡＢＣは二等辺三角形。

Ｓ４のジェスチャーを交えて説明する姿は，実際に折った活動のイメージを表現したものである。ここでの説明は，“折った”という事実が各自に共通した体験としてあり，直観的・心理的に明らかな言明により理解されていることからも，前形式的証明に分類されると考えられる。それがＳ１の理解につながっており，操作活動が論理的思考への橋渡しとして有効にはたらくことが示唆される。

3.2.2. 証明の必要感は感じられたか？

3.2.1.の場面と前後するが，「△ＡＢＣが二等辺三角形になる根拠を，定規で測ったりせずに考えてみよう」という課題がどのように設定されたかについて振り返ってみる。

教師は，「これらの三角形に共通していることはないでしょうか？」と問いかけて，二等辺三角形を証明の対象にしようとした。しかし，生徒からの反応は，次の通りであった。

S3：何となく，二等辺三角形になってるのかな，っていうふうに思います。

S1：調べたら，二等辺三角形っぽい。

S1：測ってみないとわからない。言われるとそう見えてきてしまう…。

ここには二つの問題点が見えてくる。一つは，二等辺三角形が証明の対象として生徒に位置づいていない，つまり，必要感が十分喚起されていないということである。また，もう一つは，いざ証明に移ろうとした時，「測る」という操作活動から見方が離れないことである。そして，結局は，教師が，「物さしで測ったり紙を折ったりしないで，二等辺三角形だよってことを説明してみましょう。」と問題設定を行い，当初ねらっていた生徒側から証明の必要性を感じ課題設定を行う授業とはならなかった。

この授業の反省を授業設計に生かす上で，問題点をさらに明確にとらえていく必要があり，そのために，Brousseau（1997）の教授学的状況理論が有効に機能すると考える。以下では，まず，理論の概観に触れ，その後に，この指導について再度振り返ってみたい。

４．証明の必要感をもたせる授業展開の工夫

4.1. Brousseauの教授学的状況理論の概観

Brousseau（1997）によれば，一般的に，教授の状況は，生徒，教師，環境（milieu：ある生徒たちが働きかけている対象の集合）の間のやりとりという視点から記述でき，分類できる。そして，よい場（基本的状況）の設定により，「行為の状況」を導き出し，そこから，「定式化の状況」，「妥当化の状況」へと発展していく展開を，『２０への競争』というゲームを扱った小学校での授業を例に挙げて述べている。

このゲームは，２人で行い，相手が与えた数に１か２をたして，先に２０にたどり着いた方が勝ちというゲームである（図９）。

①	2	$\boxed{3}$	4	⑤	6	$\boxed{7}$	…	⑰	$\boxed{18}$	19	⑳

図９．『２０への競争』の例（Ⓐ対$\boxed{\text{B}}$）．

最初の局面は，１対１のゲームを楽しむ中で，子どもたちが勝ち方の方略（「暗黙のモデル」）を頭の中に抱くことをねらう。この状況を Brousseau は「行為の状況」と呼ぶ。ここでの子どもにとっての環境（milieu）は，ゲームの経過を示す数の列（図９）である。

次に，チーム対抗戦が行われ，ここでは，相手チームに勝つためには，自分がどんなストラテジーをもっているかをチームの仲間に示すことが行われる。そして，ゲームにおける重要な場所が，定理として共有されていく。ここで子どもにとっての環境（milieu）には，チームの仲間や対戦チームが加わる。この状況が「定式化の状況」または「コミュニケーションの状況」である。

さらに，理論的推論へ高めていく段階として，各チーム交互に発見したストラテジーを提案する「発見のゲーム」の場が設定される。それらの発見は，相手チームにより検証され，受け入れられるかまたは拒否される。提案チームは，プレーするか例証によってそれが真か偽かを相手チームに証明しなければならない。ここでは，相手チームが語ったメッセージが考察の対象となり，その妥当性が判断されるので，これらのメッセージが環境（milieu）に加わることになる。この状況が「妥当化の状況」である。

また，Brousseau と Gibel（2005）は，それぞれの状況で期待される推論を，以下のように示している。

「「行為の状況」における推論（N1）

それ自体では定式化されないが，行為に基づいて主体に帰され，この行為のモデルであると解釈され得る推論。（「暗黙のモデル」と呼ばれる）

「定式化の状況」における推論（N2）

正式な見地からは不完全な推論であるが，完全な定式化が正当化されないシツエーションで主体の行為によって暗黙的に満たされたものとして考えられる推論。

「妥当化の状況」における推論（N3）

知識の諸要素を明示的に参照して，適切に結びつけられる推論の連続に基づいた完全に正式な推論。」

Brousseau の見解では，「行為の状況」に始まり，「定式化の状況」，「妥当化の状況」へと進む状況では，真偽の判定者は教師でなく子どもであり，「責任の委譲」された状態で，上記の推論と状況が展開される。この展開は，必要感から証明を生む１つの展開のモデルを示しているように思われる。

4.2. 予備的実験授業において，なぜ証明の必要性が感じられなかったのか

予備的実験授業を教授学的状況理論の点から振り返ったとき，大きな問題点は，「行為の状況」と「定式化の状況」が十分成立しなかったことと言い換えることができるように思う。つまり，生徒自らが，直線テープを折る行為を繰り返す中で「どんな折り方をしても，△ＡＢＣは二等辺三角形と言えそうだけど，本当だろうか？（どうしてだろう？）」という意識に至らなかった。

この授業で使用した学習カード上では，各自が自分の手元で３回直線テープを折ることができるようになっていた。しかし，生徒にとって最初の３回の行為は，重なった部分の形が三角形であることをつかむためのものとなっていて，その三角形の特徴を考えるための対象とはなっていなかった。最初の紙を折る活動とは別に，あらためて形の共通性を追究するための生徒の行為が必要だったのではないか。例えば，先に折ったテープの重なりを連続変形させて提示したり，重なった部分の形に注目して折り直したり，平行ではない

テープを折った場合との比較等でも可能であったと思われる。いずれにしろ，この時点での生徒の環境（milieu）は，目の前で見える重なっている現象だけである。また，行為が，生徒が何のためにやっているかを評価できる対象にもなっていなかったように思われる。これらが，「行為の状況」として見てとれない問題点であったと考える。

次に，証明を「相手を納得させる」「相手に説明する」ためのものという位置づけで考えた場合，相手を意識する以上，ペアによる話し合い活動を取り入れたり，説明をする相手を想定したりする等，対話の対象となる「相手」が環境（milieu）に加わってくるような場の設定が必要であった。また，「行為の状況」からの必然的な流れとして「定式化の状況」がつくられてもいなかったと思われる。

以上のことから，予備的実験授業を，Brousseau の教授学的状況理論の視座に立ち分析したとき，以下のことが示唆される。

①「行為の状況」で，問題場面との「対話」を引き出す要素が含まれているか。

②「定式化の状況」で，他者を含めるような環境（milieu）の広がりがあったか。

これらに鑑みて，以下では，算数と数学を接続する中学１年の図形の学習指導を考えていく。

５．算数から数学への移行の視点からの中学１年『平面図形』の授業構想

本節では，算数から数学への移行を促す中学１年『平面図形』の単元開発のデザインについて述べていく。

算数から数学への接続の視点から，教科書（一松他，2005）の単元扉にある『麻の葉模様』(図 10）を基本的状況（Brousseau，1997）に据えて，「図形の発見ゲーム」，「陣取りゲーム」，「作図の発見ゲーム」の３つの大きな場を設定し，各場の中で教授学的状況理論のプロセスを想定した。

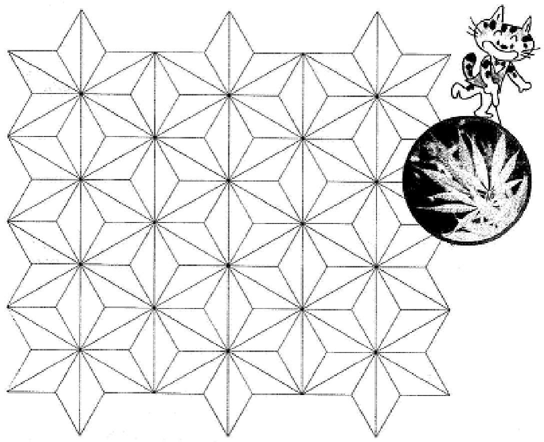


図 10．麻の葉模様.

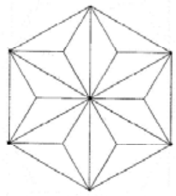


図 11．麻の葉の基本形.

まず，基本的状況である『麻の葉模様』について述べておく。右図（図 11）を麻の葉の基本形と考えたとき，そこには次の特徴や活動が包含されていると考えられる。

①多くの既習の図形
②対称性（線対称・点対称）への気づき
③空間図形（立方体，三角錐）
④補助線のイメージへのつながり
⑤合同な図形
⑥図形の敷き詰め・移動

5.1．図形の発見ゲーム

最初の場は，折り紙で麻の葉を折ったり，麻の葉模様に隠れている図形やその特徴を確認したり発見したりしながら，小学校で学習したいろいろな図形やその性質を導き出すことを意図した場である。さらに，これを，「発見ゲーム」とし，根拠をもとに説明することを意図した。

麻の葉を折ったりかいたりするには，正六角形や正三角形をつくることが基本となる。その操作過程と折り目として残る線(補助線)から，いくつもの図形（正三角形，正六角形，ひし形，平行四辺形，二等辺三角形，直角三角形，台形，立方体，三角錐，等）や性質（平

行，垂直，対称性）の発見が期待できる。このことをもとに，「図形の発見ゲーム」の場を設定する。「行為の状況」は，麻の葉を作図したり折ったりしながら図形を発見し合うことである。このとき，根拠も同様に考える。図形を特徴づける性質は，小学校での既習事項であるため，生徒が，その性質を，説明の道具として活用することがねらいである。

次に，学級を２チームに分け，発見項目を交互に１つずつ発表していく。毎回違う人が発表するようにして，自分のこととして問題をとらえていくようにする。なお，このゲームは，以下のようなポイント制で進める。

- 提案した発見が結果的に正しいと認められたら提案チームに１ポイント
- 提案理由が正しいと認められたら提案チームに１ポイント
- 提案に対して反論を提出しそれが認められたら反論提案チームに２ポイント
- 付け足しが認められたら付け足し提案チームに１ポイント
- その他，表現や状況に応じて加点

ゲームのはじめの段階では，直観的な推論による説明が中心となると予想されるが，図形の性質に基づいて図形を確定させる状況が「定式化の状況」である。

次に，相手チームに反論されないためにはすでに正しいと認められていることを根拠に説明することが効率的である。チーム内で提案の順番を考えて練り上げるとき，生徒の環境（milieu）には，麻の葉模様と味方チームの仲間に加え，相手チームのメッセージやすでに認められた発見内容が含まれてくる。

また，説明をする際に，図形の場所をはっきりさせる必要性が出てくると思われる。その時が，図形における記号導入の機であり，記号を使いながら図形を表現していくことは，論証に向けての歩みを進めることにつながると考える。

この時点では，推論の中に経験的説明が入り込むことも予想されるが，順序を考慮しながら図形を位置づけていく思考が行われることが期待でき，この状況を「妥当化の状況」ととらえる。

5.2. 陣取りゲーム

第２の場は，麻の葉の基本形を利用した移動による「陣取りゲーム」である。現行の指導要領から削除された「平行」・「対称」・「回転」移動とその発展をとり入れ，図形を動的にとらえ，関係性の認識を高めることをねらったものである。

２人１組で先攻・後攻を決め，先ず基準の陣地を１か所決める。そこから，交互に自分の好きな移動で陣地を取り，多く陣地を取った方が勝ちというゲームである。その際，移動の種類がわかるように取った陣地に「平」・「対」・「回」と書き込んでいく。

最初は，１対１のゲームを楽しむ（「行為の状況」）。このゲームは，全ての場所へ１回で移動が可能なので，理論的には引き分けるゲームであるが，回転の中心に気づくことが難しいと思われる場所がいくつかある。そこで，基準の場所のとり方が重要な方策と考える生徒も出てくるであろう。回転の中心や角度，対称の軸や平行移動の方向・距離を明確にしながらそれぞれの移動方法について説明する状況を「定式化の状況」と想定する。

そして，１回の移動だけで考えるのでなく，２つの移動を組み合わせて考え，一つの移動（写像）を，移動の合成（合成写像）と対応づけたり，逆に，麻の葉の中に明示されていない回転の中心を見つけて，移動できる範囲を拡張，確定することは，それまでの移動方法を対象にして，このゲームの「仕組み」を探究することになるため，ある意味で「妥当化」の領域に入り込んだ状況ととらえたい。しかし，本格的には，なぜその移動が正しい

かなどについての証明が必要となる場の設定が求められよう。その場は，次の「作図の発見ゲーム」の後に位置づけたい。

5.3. 作図の発見ゲーム

第３の場「作図の発見ゲーム」は，第１の場で発見した全ての図形についての作図を試み，また，第２の場で培った移動の考えも利用しながら，その手続きの正当化によって論証への足がかりをつくる場である。

まず，図形をイメージしながら，第１の場での図形の作図を発見する（行為の状況）。この作図の場では，「直角」の作図がカギになってくると想定される。ここにおける説明において重要な役割を占めるのが，ひし形やたこ形（岡崎，岩崎，2003）の作図である。

直角を,図形の性質を媒介に説明すること，具体的には,その時点で認められたひし形(たこ形）の作図をもとにして，「ひし形（たこ形）の対角線になっているから直角である」といった説明ができれば，根拠に基づいた作図が行えたと言えよう。これを「定式化の状況」と考える。また，ひし形を媒介にして平行線を描いたり，三角形の合同を用いて，角を写しとったりすることも，算数での知識を活用して，他の図形をうみ出す，「関係性」を培う見方であり，これも「定式化の状況」として位置づけられよう。

しかし，この状況では，ひし形（たこ形）を媒介にした説明が作図法として認められるいわば「描き方の説明」の共通理解のレベルであると思われる。ここで，再度，その説明の出発点であるひし形（たこ形）に着目し，前提の確かさを吟味することで，仮定から命題を導く理論体系が成立するものと期待する。つまり，作図を振り返って，理論体系について吟味・検討することが，「妥当化」の場の一つとして位置づけられよう。

また，第２の場と第３の場の総合的な視点から，任意の回転移動の中心を作図によって求める活動を仕組み，「なぜ回転移動が可能か？」を考えたい。第２の場では，生徒たちは，回転移動が，麻の葉模様の「陣取りゲーム」に大きな役割を果たすことが意識できていると思われ，“どんな位置でも移動が可能だろうか？”という探究の必要性が認識されているものと想定される。そこで，これを話題にして，生徒たちから，どんな説明がつくられるかを検討してみたい。ここでは，直観的・操作的な説明が入り込むことを許しながら，証明のすじ道をたどることができれば，論証の水準に入り込んだととらえたい。これが，３つの場の総合的な見地から考える「妥当化の状況」である（注）。

６．まとめと今後の課題

本稿では，算数から数学への移行期における生徒の思考の特徴をとらえ，この時期に適する論証指導の可能性を先行研究から考察し，中学２年で本格的になる論証について，その足がかりを中学１年でつくる単元の展開を試みた。

その際に，表現・コミュニケーションの面と認知面からの移行的段階の仮説的な枠組み（図６）を設定し，移行の様相をとらえることとした。また，Brousseau の教授学的状況理論の視点から，基本的な学習プロセスとその特徴を吟味し，その状況理論に基づいて，中学１年『平面図形』の単元構想を練った。

単元構想については，図形を発見し，図形の性質や図形間の関係に言及して正当化する見方を共有する場，移動により，動的な図形のとらえや図形の関係性の認識を高める場，作図を論理的に検討していく場，の３つの大きな場を設定して考えた。

今後の課題は，実際に授業を行い，それぞれの場を，Brousseau の教授学的状況理論に照らして分析し，移行的段階の仮説的枠組みを再検討することである。また，中学２年の文字や図形の論証場面に、1 年時の指導がど

のように影響しているかを継続的に調べることも課題としたい。

謝辞

本研究を進めるにあたり，新潟県上越市立三和中学校の秋山正道校長先生には，研究の意図を十分にくみとっていただき，授業の場を提供していただきました。また，黒田匠先生をはじめ数学科の先生方，１年生の生徒の皆さんには調査において多大なるご協力をいただきました。謹んで感謝の意を表します。

注及び引用・参考文献

注．各状況の「妥当化」の後に，教科書の内容との整合を行う場面（「制度化の状況」（Brousseau，1997））を適宜挿入する。

Brousseau,G.（1997）．Theory of Didactical Situations in Mathematics．Kluwer Academic Publishers．

Brousseau,G and Gibel,P.（2005）．Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Solving Situations．Educational Studies in Mathematics，59，13-58.

江森英世．（1994）．Oral expression の指導のポイント．中学校数学科教育実践講座第６巻，（pp.274-280）．ニチブン．

榎戸章仁他．（1988）．討論による学習指導－図形概念の学習指導を取り上げて．日本数学教育学会誌，70(1)，2-8.

Fawcett,H.P.（1966）．The Nature of Proof．13th NCTM Year-book．AMS Reprint Company．

橋本是浩，風間喜美江．（2000）．論証導入期の指導について（3）．日本数学教育学会，第 33 回数学教育論文発表会論文集，289-294.

橋本是浩．（2006）．生徒が創造性を発揮し，意欲的に活動する図形指導．数学教育７月号，4-7．明治図書．

林伸樹．（1959）．論証が始まる頃の生徒の思考法．日本数学教育会誌，41(9)，1-3.

平林一栄．（1986）．数学教育の有効性のために．奈良教育大学紀要，36，13-29.

平林一栄．（1991）．図形の指導内容の概観と問題点の考察．平林一栄他編，新・算数指導実例講座第７巻図形〔低・中学年〕（pp.39-72）．金子書房．

一松信他．(1996)．中学校数学１．学校図書．

一松信他．(2005)．中学校数学１．学校図書．

小関熙純他．（1992）．図形の論証指導．明治図書．

國本景亀．（1995）．空間直観力と論理的思考力を育成するための教材開発と指導法の改善．平成６～７年度文部省科学研究費補助金一般研究（C）．

国宗進．（1987）．「論証の意義」の理解に関する発達の研究．数学教育学論究，47,48，3-21．

岡崎正和．（1999）．図形を定義する活動の位置づけに関する基礎的考察―図形の相互関係に関する調査と関連して―．全国数学教育学会，数学教育学研究，５，101-110.

岡崎正和，岩崎秀樹．（2003）．算数から数学への移行教材としての作図―経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践．数学教育学論究，80，3-27.

清水美憲．（1996a）．数学教育におけるメタ認知研究の成果からみた『証明の本性』の意義と限界．筑波数学教育研究，15，63-75.

清水美憲．（1996b）．数学的定義の構成過程におけるメタ認知の役割．第 29 回数学教育論文発表会論文集，253-258.

相馬一彦．（2003）．大きな変化を踏まえ，教材研究の充実を．数学教育５月号，4-9．明治図書．

杉山吉茂．（1986）．公理的方法に基づく算数・数学の学習指導．東洋館出版社．